فصل ۳
متغیرهای حقیقی

در مجموعه ها دیدیم که گاهی اوقات نوشتن اعضاء کاری بس دشوار و در برخی موارد کسل کننده یا حتی ناممکن است و بدینگونه تعریفی ریاضی مجموعه را ارائه نمودیم. اکثر اوقات در ریاضیات لازم است که بجای استفاده از اعداد، متغیری را در نظر گرفته و رفتار متغیر دیگری وابسته به آن سنجیده شود. مزیت اینکار همانند نمایش شکل ریاضی یک مجموعه و نمایش عضوی مجموعه است. در اینجا نیز بجای کار با اعداد که مصادقند از متغیرها که شامل یک طیف وسیع از اعدادست استفاده خواهیم نمود.

۱.۳ متغیرهای جبری

متغیر، علامتی است که جانشین یک یا چند عدد می شود. متغیر را معمولاً با حروف کوچک انگلیسی مانند $x, y, z, \cdots$ نشان می دهیم. عبارت $۲x$ حاصل ضرب عدد دو در متغیر x است که این متغیر می تواند شامل هر عددی حقیقی شود. بهمین صورت عبارت $x^۳ - ۱$ حاصل مکعب متغیر x منهای یک است که متغیر x می تواند هر عدد حقیقی دلخواهی باشد. این متغیر از درجه سه است. در حالت کلی درجه متغیر عبارتست از توان آن. اکنون کار با متغیرها را می آموزیم.

۱.۱.۳ عبارات جبری

عبارتی متشکل از یک عدد و حاصلضرب یک یا چند متغیر را یک جمله‌ای گوئیم. یک جمله‌ای های زیر را ببینید:

$$۲x \ , \ x^۲ \ , \ ۵xy \ , \ ۴xz \ , \ ۲۰x^۳yzt$$

دو یک جمله‌ای که متغیر با درجه های یکسان داشته باشد را متشابه نامیم. مجموع چند یک جمله‌ای، یک چندجمله‌ای تشکیل می دهد و توان متغیرهای چندجمله ای بایستی اعداد طبیعی باشند. مثلاً جمع و یا تفاضل یک جمله‌ای های بالا برابر است با

$$۲x + x^۲ - ۵xy + ۴xz - ۲۰x^۳yzt$$

که یک پنج‌جمله‌ای است. یک چندجمله‌ای می تواند دارای متغیرهای زیادی باشد و بدیهی است که هر چندجمله‌ای با تعداد جملاتش شناخته می شود. در هر چندجمله‌ای، درجه نسبت به هر یک از متغیرها بزرگترین درجه آن متغیر است. درجه هر جمله نسبت همه متغیرها بزرگترین درجه آن متغیر است. به عنوان مثال در چندجمله‌ای $۲x^۲y + ۴xz^۵ - ۳x^۲y^۵z^۷$ درجه نسبت به x برابر ۲، درجه نسبت به y برابر ۵ و درجه نسبت به z برابر ۷ است. درجه نسبت به همه متغیرها برابر ۱۴ است. بدین ترتیب گوئیم این عبارت یک سه‌جمله‌ای درجه ۱۴ است.

عبارت جبری عبارتی است که در آن چند یک جمله‌ای با چهار عمل اصلی و توان و رادیکال به هم مربوط شده باشند.

مثل عبارت جبری زیر

$$۲x^۳ - ۴\sqrt{xy} + \frac{۳}{z} + ۲$$

عملیات ریاضی روی عبارات جبری، مانند اعداد حقیقی است و توان و رادیکال نیز دارای همان قوانین بخشهای ۱.۳.۲ و ۴.۲ هستند. مجموعه مقادیری که می توانند جانشین متغیرهای آن عبارت شوند، دامنه عبارت جبری نامیده می شود. در عبارات جبری بالا دامنه عبارتست از همهٔ اعداد حقیقی که $xy > ۰$ و $z \neq ۰$ است. همچنین هر عبارت کسری با مخرج صفر، عبارتی نامعین است که از لحاظ ریاضی تعریف نشده است.

مثال ۱.۱.۳. عبارت جبری $\frac{(۲ab^۲c)^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲}$ را ساده کنید.

حل. با استفاده از قانون توانها چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\frac{(۲ab^۲c)^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲} &= \frac{۲^۳a^۳(b^۲)^۳c^۳ \times bc^۴}{۸a^۲b^۵c^۲ \times a^۲} \\
&= \frac{۸a^۳b^۷c^۷}{۸a^۴b^۵c^۲} \\
&= \frac{b^۲c^۵}{a}
\end{aligned}$$

■

۲.۱.۳ فاکتورگیری

روش فاکتورگیری روشی برای تجزیه چندجمله ای هاست. در این روش از بین جملات یک چندجمله‌ای، مقدار مشترکی را که در همهٔ جملات وجود دارد در نظر گرفته و آن را از تک تک جملات برمی‌داریم. بطور مثال در سه‌جمله‌ای $۳a^۳ + ۱۲a^۵b - ۳۰da^۴$ بطور مشخص مقدار $a^۳$ در تمام جملات دیده می شود. علاوه براین ضرایب هر سه جمله بر عدد ۳ قابل قسمتند. بنابراین فاکتور مشترک در این چندجمله ای مقدار $۳a^۳$ خواهد بود و می نویسیم:

$$۳a^۳ + ۱۲a^۵b - ۳۰da^۴ = ۳a^۳(۱ + ۴a^۲b - ۱۰da)$$

از فاکتورگیری برای تجزیهٔ چندجمله‌ای ها استفاده می شود. بنظر شما در هر یک از عبارات زیر، فاکتور چه خواهد بود؟

$$۵a^۲xy + ۱۰xaby^۲ - ۲۰dxy^۵a^۴ \ , \ \ ۱۲x^۲z^۳ + ۲۰x^۵z^۴ - ۸z^۲x^۴$$

۳.۱.۳ اتحادها

اکنون عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$(a+b)(a+b) = a^۲ + ab + ba + b^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

در اینجا برعکس حالت فاکتورگیری، جملات را ضرب کرده و عبارت را ساده نموده‌ایم. به چنین عبارتی که همیشه دو طرفش (بازای هر مقداری از متغیرها) برابر است، اتحاد می گوئیم. اتحادها را بطور خلاصه می توان بصورت زیر دسته‌بندی نمود.

$(a+b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$	مربع مجموع دوجمله‌ای	(۱)
$(a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$	مربع تفاضل دوجمله‌ای	(۲)
$(a+b)^{۳} = a^{۳} + ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} + b^{۳}$	مکعب مجموع دوجمله‌ای	(۳)
$(a-b)^{۳} = a^{۳} - ۳a^{۲}b + ۳ab^{۲} - b^{۳}$	مکعب تفاضل دوجمله‌ای	(۴)
$a^{۲} - b^{۲} = (a-b)(a+b)$	اتحاد مزدوج	(۵)
$a^{۳} + b^{۳} = (a+b)(a^{۲} - ab + b^{۲})$	مجموع مکعب ها	(۶)
$a^{۳} - b^{۳} = (a-b)(a^{۲} + ab + b^{۲})$	تفاضل مکعب ها	(۷)
$(x+a)(x+b) = x^{۲} + (a+b)x + ab$	اتحاد جمله مشترک	(۸)

مثال ۲.۱.۳. مثال های زیر را ببینید:

$$\begin{aligned}
(a+۳)^{۲} &= a^{۲} + ۶a + ۹\\
(x-r)^{۲} &= x^{۲} - ۲xr + r^{۲}\\
(e+۲)^{۳} &= e^{۳} + ۶e^{۲} + ۱۲e + ۸\\
(a-x)^{۳} &= a^{۳} - ۳a^{۲}x + ۳ax^{۲} - x^{۳}\\
a^{۲} - ۳^{۲} &= (a-۳)(a+۳)\\
a^{۳} + ۴^{۳} &= (a+۴)(a^{۲} - ۴a + ۱۶)\\
z^{۳} - ۸ &= (z-۲)(z^{۲} + ۲z + ۴)\\
(x+۳)(x+۴) &= x^{۲} + ۷x + ۱۲
\end{aligned}$$

از اتحادها می توان برای تجزیهٔ عبارات جبری بهره برد:

مثال ۳.۱.۳. با استفاده از روش فاکتورگیری و اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^{۲} - ۲xy + y^{۲}}{x^{۲} - y^{۲}} \times \frac{x^{۳} + x^{۲}y}{x^{۲} - xy}$$

حل. با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\frac{x^{۲} - ۲xy + y^{۲}}{x^{۲} - y^{۲}} \times \frac{x^{۳} + x^{۲}y}{x^{۲} - xy} &= \frac{(x-y)^{۲}}{(x-y)(x+y)} \times \frac{x^{۲}(x+y)}{x(x-y)}\\
&= \frac{(x-y)}{(x+y)} \times \frac{x(x+y)}{(x-y)}\\
&= x
\end{aligned}$$

■

مثال ۴.۱.۳. عبارت $\frac{x^{۳}y + x^{۲}y^{۲}}{x^{۲} - y^{۲}} \times \frac{x^{۳} - y^{۳}}{x^{۳} + x^{۲}y + xy^{۲}}$ را ساده نمائید.

حل. با استفاده از فاکتورگیری و اتحادها داریم:

$$\frac{x^{۳} - y^{۳}}{x^{۳} + x^{۲}y + xy^{۲}} \times \frac{x^{۳}y + x^{۲}y^{۲}}{x^{۲} - y^{۲}} = \frac{(x-y)(x^{۲} + xy + y^{۲})}{x(x^{۲} + xy + y^{۲})} \times \frac{x^{۲}y(x+y)}{(x+y)(x-y)} = xy$$

■

مانند اتحادهای مربع و مکعب دوجمله‌ای، می توان های اتحادهائی با توان های بیشتر از ۳ را نوشت. برای اینکار ضرایب را بکمک مثلث خیام ـ نیوتن بشکل زیر می یابیم. در این مثلث، عدد هر سطر از مجموع دو عدد فوق آن حاصل شده و اعداد یک در طرفین ثابت هستند.

$$\begin{array}{c} ۱ \\ ۱ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۲ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۳ \quad ۳ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۴ \quad ۶ \quad ۴ \quad ۱ \\ ۱ \quad ۵ \quad ۱۰ \quad ۱۰ \quad ۵ \quad ۱ \\ \cdots \end{array}$$

مثلاً برای نوشتن اتحاد $(a+b)^۵$، با بکار بردن اعداد سطر آخر بعنوان ضرایب، با شروع توان $a^۵$ هر بار یکی از توان آن کاسته و بر توان b اضافه می کنیم تا b نیز به توان ۵ برسد. حاصل چنین اتحادی است:

$$\begin{aligned} (a+b)^۵ &= ۱a^۵b^۰ + ۵a^۴b^۱ + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵a^۱b^۴ + ۱a^۰b^۵ \\ &= ۱a^۵ + ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ + ۱b^۵ \end{aligned} \tag{۱.۳}$$

به این روش بسط دوجمله‌ای نیز گوئیم. با ادامهٔ مثلث خیام ـ نیوتن اتحاد $(a+b)^۷$ را بنویسید. از کاربردهای دیگر اتحادها، تجزیهٔ کسرها است. در مثال زیر کسری با مخرج سه جمله‌ای به دو کسر مجزا تجزیه شده است. ببینید:

مثال ۵.۱.۳. مقادیر A و B را چنان بیابید که اتحاد زیر برقرار باشند.

$$\frac{۵x+۷}{x^۲+۴x-۵} \equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۵}$$

حل. از دو عامل طرف راست مخرج مشترک گرفته و چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{۵x+۷}{x^۲+۴x-۵} &\equiv \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{x+۵} \\ &\equiv \frac{Ax+۵A+Bx-B}{(x-۱)(x+۵)} \\ &\equiv \frac{(A+B)x+(۵A-B)}{x^۲+۴x-۵} \end{aligned}$$

مخرجها مساویند و بایستی صورتها نیز مساوی باشند. برای اینکار ضرایب x را در صورت برابر قرار داده و ضرایب ثابت را نیز مساوی قرار می دهیم، سپس

$$\begin{cases} A+B=۵, \\ ۵A-B=۷. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=۲, \\ B=۳. \end{cases}$$

همچنین با اتحادها می توان مخرج عبارات جبری حاوی رادیکال را گویا نمود. برای مثال کسرهای زیر گویا شده اند:

$$\frac{۴}{\sqrt{۵}-۲} = \frac{۴}{\sqrt{۵}-۲}\times\frac{\sqrt{۵}+۲}{\sqrt{۵}+۲} = \frac{۴(\sqrt{۵}+۲)}{\sqrt{۵}^۲-۲^۲} = ۴(\sqrt{۵}+۲)$$

$$\frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{\sqrt[۳]{۵}+\sqrt[۳]{۲}}\times\frac{\sqrt[۳]{۵^۲}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۲^۲}} = \frac{(۲\sqrt{۲})(\sqrt[۳]{۲۵}-\sqrt[۳]{۱۰}+\sqrt[۳]{۴})}{۳}$$

تمرین ۲.۳. .

۱. عبارات جبری زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad \frac{۱۲xy^۲\times(x^۳y^۲)^۳}{۶x^۹y^۷},\quad (b)\quad \frac{(۲a^۲c)^۴\times b^۲c^۶}{۴۸a^۵b^۴c^{۱۰}\times ۵a^۳b^۲},\quad (c)\quad \frac{۱۴x^۳ty^۳\times(t^۳xy^۲)^۲}{۲۱t^۳x^۴y^۵\times(ytx)^۳}$$

۲. با استفاده از اتحادها حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{llllll}(a) & (x-\frac{۱}{۲})^۲ & ,\ (b) & (x+۴)(x^۲-۴x+۱۶) & ,\ (c) & (x+۷)(x-۴)\\ (d) & (\frac{x}{۴}+۵)(\frac{x}{۴}-۵) & ,\ (e) & (x-۳)(x^۲+۳x+۹) & ,\ (f) & (۲x+\frac{۴}{۳})^۲\end{array}$$

۳. چندجمله‌ای های زیر را تجزیه کنید.

$$\begin{array}{llllll}(a) & x^۳+۷x^۲+۶x & ,\ (b) & y^۳+۸ & ,\ (c) & x^۳-۴x\\ (d) & ۴x^۴+y^۴ & ,\ (e) & z^۴-۱۶ & ,\ (f) & ۲x^۲-۵x-۱۲\\ (g) & ۴x^۳y^۲z-۹xz & ,\ (h) & ۲x^۲+۲x-۴ & ,\ (i) & ۴x^۲+۴x+۴\end{array}$$

۴. عبارات زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{llllll}(a) & \frac{x^۲+x}{x^۲-۱} & ,\ (b) & \frac{x^۳-x}{۲x^۲-۲x} & ,\ (c) & \frac{x^۴-۱}{(۲x^۲+۲)(x+۱)}\\ (d) & \frac{(x-y)^۲}{x^۳-y^۳} & ,\ (e) & (x+۱)^۳-(x-۱)^۳ & ,\ (f) & \frac{۴x^۲-۴x(y^۳+x)}{xy}\\ (g) & \frac{۲x^۲+x}{۵y+۱۰xy} & ,\ (h) & \frac{x+۱}{x^۲+۲x+۱} & ,\ (i) & \frac{x^۲+۳x}{۷x}\div\frac{x^۲-۹}{x-۳}\end{array}$$

۵. مخرج عبارات کسری زیر را گویا نمائید.

$$(a)\ \frac{1}{\sqrt{2}+1}\ ,\ (b)\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\ ,\ (c)\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}\ ,\ (d)\ \frac{6}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$
$$(e)\ \frac{5}{\sqrt{x}+1}\ ,\ (f)\ \frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\ ,\ (g)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}\ ,\ (h)\ \frac{1}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{5}}$$

۶. بسط دوجمله ای $(a+b)^9$ را با استفاده از مثلث خیام ـ نیوتن بنویسید. سپس با جایگذاری $a=2x$ و $b=3y$ بسط $(2x+3y)^9$ را نوشته و ضریب جملهٔ سوم در این بسط را بیابید؟

۷. ضریب جمله پنجم در بسط $(4x-2z)^{10}$ چیست؟

۳.۳ معادلات و نامعادلات

وقتی دو عبارت جبری با هم برابر می شوند گوئیم معادله تشکیل شده اشت. معادلهٔ ایجاد شده ممکن است برای برخی مقادیر درست باشد. هدف ما، یافتن عددی است که اگر بجای x قرار گیرد، معادله برقرار شود. این عدد را ریشهٔ معادله گوئیم. در این بخش به حل معادلات و نامعادلات می پردازیم که خواه و ناخواه در اکثر عملیات ریاضی ظاهر می شوند و دارای مجموعه جواب های گوناگونی می باشند. یک معادله می تواند جواب نداشته یا تعدادی متناهی یا نامتناهی جواب داشته باشد.

۱.۳.۳ معادلهٔ درجه اول

معادلهٔ درجه اول بصورت $ax+b=0$ بیان می شود که در آن a و b ضرایب ثابتی هستند و a صفر نیست. معادلهٔ $2x+4=0$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $x=-2$، معادله برابر صفر می شود پس ۲- ریشهٔ معادله است. هر معادلهٔ درجهٔ اول دقیقاً دارای یک ریشه است. ریشهٔ معادلهٔ درجه اول $ax+b=0$ عبارتست از $x=-\frac{b}{a}$.

۲.۳.۳ معادلهٔ درجه دوم

این معادله بصورت $ax^2+bx+c=0$ بیان می شود که در آن a, b, c ضرایب ثابتی هستند و $a\neq 0$، مثل معادلهٔ $x^2-5x+6=0$. هر معادلهٔ درجهٔ دوم حداکثر دارای دو ریشه است. برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم ابتدا باید مقدار دلتا را که برابر با $\Delta=b^2-4ac$ است، و مبین نامیده می شود پیدا کنیم و سپس ریشه ها را از فرمول های زیر بدست می آوریم:

$$\boxed{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}} \tag{۲.۳}$$

مثال ۱.۳.۳. ریشه های معادلهٔ درجه دوم $2x^2-3x-20=0$ را به روش دلتا بیابید.

حل. در این معادله داریم $a=2\ ,\ b=-3\ ,\ c=-20$ بنابراین

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(-20)=9+160=169$$

و ریشه‌ها چنین خواهند بود:

$$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{3+13}{4}=4$$
$$x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{3-13}{4}=-2/5$$

■

مطلب ۳.۱

در این نوع معادله سه حالت بر حسب Δ اتفاق می افتد:

۱) $\Delta > ۰$ معادله دقیقاً دو ریشه دارد. این دو ریشهٔ حقیقی، همان $x_۱$ و $x_۲$ مذکور در (۲.۳) هستند.

۲) $\Delta = ۰$ معادله دقیقا یک ریشه دارد. این ریشهٔ مضاعف برابر با $x = \dfrac{-b}{۲a}$ خواهد بود.

۳) $\Delta < ۰$ معادله دارای ریشهٔ حقیقی نیست.

تمرین ۴.۳. معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & ۳x - ۲۴ = ۰ & ,\ (b) & ۵x - ۱۰ = x - ۳ & ,\ (c) & ۲x^۲ + ۷x - ۴ = ۰ \\
(d) & x^۲ - ۱۰x + ۱۶ = ۰ & ,\ (e) & ۹x^۲ - ۱ = ۰ & ,\ (f) & ۲x^۲ + x - ۱۰ = ۰
\end{array}$$

۱.۴.۳ نامعادلات

دو عبارت جبری که توسط یکی از علامتهای $>$، $<$، $\leqslant$ و $\geqslant$ بهم مرتبط باشند یک نامعادله تشکیل می دهند، مانند

$$۵x - ۴ \leqslant ۲x + ۱$$

هدف ما یافتن اعدادی است که اگر بجای متغیرهای نامعادله قرار بگیرند، عبارت صحیح بدست آید. چنین مجموعهٔ عددی را مجموعه جواب نامعادله نامیم. برای حل نامعادلات از موارد زیر کمک می گیریم:

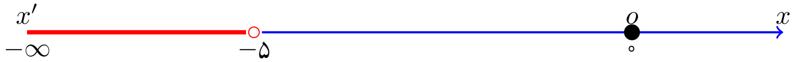
- به دو طرف نامعادله می توان یک مقدار را اضافه یا کم نمود.
- در نامعادلات اعداد و متغیرها را می توان از یکطرف بطرف دیگر منتقل کرد و در این انتقال، علامت عدد یا متغیر عوض می شود.
- طرفین یک نامعادله را می توان در یک عدد ضرب و یا بر عددی تقسیم کرد. اگر عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض می شود ولی اگر عدد مثبت باشد جهت نامعادله عوض نخواهد شد.
- اگر طرفین نامعادله را عکس کنیم، جهت نامعادله عوض می شود.

مثال ۱.۴.۳. نامعادلهٔ $۲x - ۳ > ۳x + ۲$ را حل کنید.

حل.

$$\begin{array}{rcll}
۲x - ۳ & > & ۳x + ۲ & \\
۲x - ۳x & > & +۲ + ۳ & \text{انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد بطرف راست} \\
-x & > & +۵ & \\
x & < & -۵ & \text{با ضرب طرفین در یک منفی جهت عوض می شود}
\end{array}$$

و بنابراین مجموعه جواب $(-\infty, -۵)$ است. ■



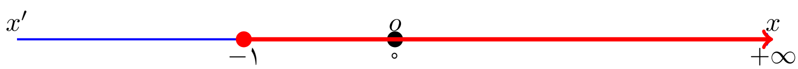
شکل ۱.۳: جواب نامعادله مثال۱.۴.۳

مثال ۲.۴.۳. مطلوبست حل نامعادله $(x+1)(x+1) \geqslant x^2 - 4x - 5$

حل.

$$
\begin{aligned}
(x+1)(x+1) &\geqslant x^2 - 4x - 5 && \text{دو پرانتز طرف چپ را در هم ضرب می‌کنیم} \\
x^2 + 2x + 1 &\geqslant x^2 - 4x - 5 && \\
x^2 + 2x - x^2 + 4x &\geqslant -5 - 1 && \text{انتقال مجهولات بطرف چپ و اعداد طرف راست} \\
6x &\geqslant -6 && \text{طرفین را بر ۶ تقسیم می‌کنیم} \\
x &\geqslant -1
\end{aligned}
$$

و مجموعه جواب $[-1, +\infty)$ است. ■



شکل ۲.۳: مجموعه جواب نامعادله مثال۲.۴.۳

یادآوری اینکه برای حل معادلات نیز از روش مشابهی استفاده می‌کنیم تنها با این تفاوت که علامت در معادله مفهومی ندارد.

۲.۴.۳ تعیین‌علامت

منظور از علامت یک عبارت، عبارتست از علامت آن بازای متغیر x که یک عدد حقیقی است. می خواهیم علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنیم. بوضوح برای $x = 2$ مقدار $P = 3$ خواهد بود و علامت P مثبت است و برای $x = 0$ مقدار $P = -1$ خواهد بود که علامت منفی را نشان می دهد. هدف ما تعیین مقادیری است که برای آن ها P مثبت یا منفی می شود. علامت دو جمله‌ای درجه اول چنین است:

مطلب ۳.۲: تعیین علامت عبارت درجه اول

برای تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول $P = ax + b$ ابتدا ریشهء آن را می‌یابیم:

$$P = ax + b = 0 \Longrightarrow ax = -b \Longrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

سپس جدول تعیین علامت را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$	کوچکتر از ریشه	$\frac{-b}{a}$	بزرگتر از ریشه	$+\infty$
P		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

بوضوح بازای ریشه $-\frac{b}{a}$ عبارت P صفر می‌شود. جدول تعیین علامت، علامت یک عبارت جبری را در بازه‌های حقیقی مختلف نشان داده و نقاطی را که در آنها عبارت صفر شده یا مقداری را نمی‌پذیرد را نیز مشخص می‌نماید.

مثال ۳.۴.۳. علامت عبارت $P = 2x - 1$ را تعیین کنید.

$$P = 2x - 1 = 0 \Longrightarrow 2x = 1 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$$

جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
P		$-$	0	$+$	

جدول فوق نشان می دهد که مثلاً برای $x = 5$ می بایست P مثبت باشد، زیرا $5 > \frac{1}{2}$. برای چندجمله ای درجه دوم نیز می توان جدول تعیین علامت تشکیل داد:

مطلب ۳.۳: تعیین علامت عبارت درجه دوم

علامت عبارت درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ در حالتی که ریشه نداشته باشد و یا یک ریشه داشته باشد، همیشه موافق علامت a است. در حالتیکه دو ریشه x_1 و x_2 داشته باشد، علامت آن بصورت زیر است:

x	$-\infty$		x_1	بین دو ریشه	x_2		$+\infty$
P		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

مثال ۴.۴.۳. بازای چه x هائی $x^2-5x+6>0$ است؟

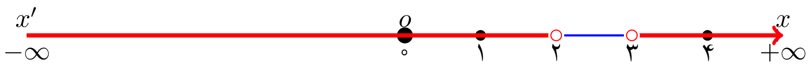
حل. ابتدا تعداد ریشه های عبارت $P=x^2-5x+6$ را می یابیم:

$$P=x^2-5x+6=0 \Longrightarrow \Delta=1>0 \Longrightarrow x_1=2\,,\; x_2=3$$

بدین ترتیب معادله دارای دو ریشه بوده و جدول تعیین علامت را می نویسیم:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
P		+	0	−	0	+	

مجموعه جواب معادله، ناحیه ای است که $P>0$ یعنی نواحی که عبارت مثبت می باشد و در نتیجه $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ مجموعه جواب است (شکل ۳.۳). ■



شکل ۳.۳: مجموعه جواب عبارت $x^2-5x+6>0$

مثال ۵.۴.۳. برای چه x هائی $x^2-4x+9>0$ خواهد بود؟

حل. در اینجا عبارت $P=x^2-4x+9>0$ ریشه ندارد زیرا

$$P=x^2-4x+9>0 \Longrightarrow \Delta=-20<0$$

مطابق مطلب۳,۳ علامت P موافق علامت $a=1$ و همیشه مثبت خواهد بود، بنابراین $\mathbb{R}$ مجموعه جواب می باشد. ■

مثال ۶.۴.۳. نامعادلهٔ روبرو را حل کنید $\dfrac{x+2}{2x-1}<\dfrac{x-2}{x+1}$.

حل. عبارت سمت راست را به طرف چپ منتقل کرده و آنرا ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{2x-1} &< \frac{x-2}{x+1}\\
\frac{x+2}{2x-1}-\frac{x-2}{x+1} &< 0\\
\frac{(x+2)(x+1)-(x-2)(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} &< 0\\
\frac{-x^2+8x}{2x^2+x-1} &< 0
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$\begin{aligned}
P_1 &= -x^2+8x=0 \Longrightarrow \Delta=64 \Longrightarrow x_1=0\,,\; x_2=8\\
P_2 &= 2x^2+x-1=0 \Longrightarrow \Delta=9 \Longrightarrow x_1=-1\,,\; x_2=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۸		$+\infty$
$P_۱$		−		−	۰	+		+	۰	−	
$P_۲$		+	۰	−		−	۰	+		+	
P		−	ن	+	۰	−	ن	+	۰	−	

که حرف «ن» مختصر نامعین است، زیرا کسر با مخرج صفر، نامعین و تعریف نشده است. مجموعه جواب برابر است با $(-\infty, -۱) \cup (۰, \frac{۱}{۲}) \cup (۸, \infty)$. ■

مثال ۷.۴.۳. مطلوبست حل نامعادلهٔ روبرو: $\frac{۲x+۴}{x-۱} - \frac{۳x}{x+۲} \geqslant ۲$

حل.

$$\begin{aligned}
\frac{۲x+۴}{x-۱} - \frac{۳x}{x+۲} &\geqslant ۲\\
\frac{۲x+۴}{x-۱} - \frac{۳x}{x+۲} - ۲ &\geqslant ۰\\
\frac{(۲x+۴)(x+۲) - ۳x(x-۱) - ۲(x-۱)(x+۲)}{(x-۱)(x+۲)} &\geqslant ۰\\
\frac{-۳x^۲+۹x+۱۲}{(x-۱)(x+۲)} &\geqslant ۰
\end{aligned}$$

با تعیین علامت صورت و مخرج داریم:

$$\begin{aligned}
P_۱ &= -۳x^۲+۹x+۱۲ = ۰ \Longrightarrow \Delta = ۲۲۵\\
&\Longrightarrow x_۱ = \frac{-۹+\sqrt{۲۲۵}}{-۶},\ x_۲ = \frac{-۹-\sqrt{۲۲۵}}{-۶} \Longrightarrow x_۱ = -۱,\ x_۲ = ۴\\
P_۲ &= (x-۱)(x+۲) = ۰ \Longrightarrow x_۱ = ۱,\ x_۲ = -۲
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۴		$+\infty$
$P_۱$		−		−	۰	+		+	۰	−	
$P_۲$		+	۰	−		−	۰	+		+	
P		−	ن	+	۰	−	ن	+	۰	−	

مجموعه جواب $(-۲, -۱] \cup (۱, ۴]$ می باشد. ■

نکته انتهائی قابل ذکر این است که یک عبارت جبری را که در یک طرف یک معادله یا نامعادله‌ای واقع است بشرطی می توان ساده نمود که دامنهٔ این عبارت را برای جواب نهائی در نظر بگیریم تا جواب نهائی شامل ریشه های مخرج عبارت اولیه نباشد.

تمرین ۵.۳. نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را روی محور اعداد رسم نمائید.

$$\begin{array}{llcll}
(a) & ۲x+۴ \geqslant x+۵ & , & (b) & (x-۱)(۳x-۳) \leqslant (x-۱)(۳x+۵)\\
(c) & (۲x-۱)(x+۲) > ۲x^۲ & , & (d) & ۲x^۲-۵x+۶ \leqslant (۲x-۳)(x-۲)\\
(e) & (x^۲-۴)(x^۲+۱) \leqslant x^۴-۷ & , & (f) & \frac{۲x^۲+x+۱}{x-۶} > ۲x-۱
\end{array}$$

۱.۵.۳ دستگاه معادلات خطی و روش حذفی

منظور از دستگاه خطی دو معادله و دو مجهولی با مجهولات x و y دستگاهی به شکل

$$\begin{cases} ax + by = \alpha, \\ cx + dy = \beta. \end{cases}$$

است و هدف یافتن جواب دستگاه است یعنی اعدادی که در دستگاه بجای مجهولات x و y صدق می‌کنند. می دانیم با روش های ابتدائی کافیست برای یافتن x و y، یک یا هر دو معادله را در اعدادی چنان ضرب می کنیم که یکی از مجهولات در دو معادله قرینه گردد و سپس معادلات را جمع و مجهولات را بدست می آوریم. این روش به روش حذف گاوس معروف است.

روش دیگر به روش تبدیلی موسوم است. در این روش ابتدا با استفاده از یک معادله، یکی از مجهولات را بر حسب دیگری یافته و در معادلهٔ دیگر جایگزین می کنیم و بدین ترتیب براحتی معادله حل می گردد. مثال زیر را ببینید.

مثال ۱.۵.۳. مطلوبست حل دستگاه زیر با روش تبدیلی.

$$\begin{cases} ۴x - ۵y = -۱۱, \\ x + ۲y = ۷. \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ دوم دستگاه مقدار مجهول x عبارتست از $x = ۷ - ۲y$ که با جایگذاری در معادلهٔ نخست داریم:

$$\begin{aligned} ۴x - ۵y = -۱۱ \quad &\Longrightarrow \quad ۴(۷ - ۲y) - ۵y = -۱۱ \\ & \qquad -۱۳y = -۳۹ \\ & \qquad y = ۳ \\ x = ۷ - ۲y \quad &\Longrightarrow \quad x = ۱ \end{aligned}$$

■

همچنین با روش تبدیلی قادر به حل دستگاه های چند معادله و چند مجهولی هستیم.

مثال ۲.۵.۳. مطلوبست حل دستگاه زیر با روش تبدیلی.

$$\begin{cases} ۲x + ۴y + z = -۱, \\ ۳x + ۲y - ۲z = ۱۰, \\ ۲x - y + ۳z = ۷. \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ سوم دستگاه مقدار مجهول y عبارتست از $y = ۲x + ۳z - ۷$ که با جایگذاری در معادلهٔ اول و دوم می نویسیم:

$$\begin{cases} ۲x + ۴(۲x + ۳z - ۷) + z = -۱, \\ ۳x + ۲(۲x + ۳z - ۷) - ۲z = ۱۰. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱۰x + ۱۳z = ۲۷, \\ ۷x + ۴z = ۲۴. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴, \\ y = -۲, \\ z = -۱. \end{cases}$$

و مجموعه جواب را می توان بصورت $\{(۴, -۲, -۱)\}$ نیز نوشت. ■

دستگاه های معادلات می توانند شامل نامساوی هم باشند. روش حل اینگونه دستگاه ها ترکیبی از حل معادلات و نامعادلات است. مثال زیر را ببینید.

مثال ۳.۵.۳. مطلوبست حل دستگاه.

$$\begin{cases} x + ۳y = ۴, \\ ۲x - y \geqslant ۱۵. \end{cases}$$

حل. از معادلهٔ اول مقدار مجهول x عبارتست از $x = ۴ - ۳y$ که با جایگذاری در معادلهٔ دوم می نویسیم:

$$\begin{aligned} ۲x - y &\geqslant ۱۵ \\ ۲(۴ - ۳y) - y &\geqslant ۱۵ \\ -۷y &\geqslant ۷ \\ y &\leqslant -۱ \end{aligned}$$

از طرفی هم $x = ۴ - ۳y \geqslant ۴ - ۳(-۱) = ۷$ یا $x \geqslant ۷$ بدست می آید. ■

رشد و زوال پلکانی. در مواردی طبیعی و تصنعی حالاتی وجود دارد که مقدار یک متغیر با رشدی پلکانی افزایش یافته و یا با زوالی پلکانی کاهش می یابد. در این موارد می توان با بهره گیری از معادلات و عملیات جبری مسئله را به شکلی ریاضی طرح و بحث نمود. ابتدا مثالی را از زوال پلکانی توضیح می دهیم:

مثال ۴.۵.۳. (فیزیک) ایزوتوپ رادیوم ایزوتوپ رادیوم $Ra^{۲۲۸}$ هر سال ۹/۸٪ از شدت تابش خود را طی تلاشی از دست می دهد. اگر $I_۰$ شدت اولیهء این عنصر باشد، شدت تابش را پس از یک سال، دو سال و ۱۰۰ سال حساب کنید.

حل. فرض اینست که در آغاز شدت تابش عنصر $I_۰$ است. پس از یکسال شدت تابش آن ۹/۸٪ کم می شود و بنابراین شدت تابش آن پس از یکسال

$$I_۱ = I_۰ - ٪۹/۸I_۰ = (۱ - \frac{۹/۸}{۱۰۰})I_۰$$

یا $I_۱ = ٪۹۰/۲I_۰$ خواهد بود. پس از سال دوم شدت تابش آن مجدداً ۹/۸٪ کم می شود و بنابراین شدت تابش آن پس از دوسال

$$I_۲ = I_۱ - ٪۹/۸I_۱ = (۱ - \frac{۹/۸}{۱۰۰})I_۱ = ٪۹۰/۲I_۱ = (٪۹۰/۲)^۲I_۰$$

یا $I_۲ = (٪۹۰/۲)^۲I_۰$ خواهد شد. با تکرار این روند شدت تابش پس از صد سال برابر با $I_{۱۰۰} = (٪۹۰/۲)^{۱۰۰}I_۰$ است. ■

مطلب ۴.۳

در حالتی کلی اگر ایزوتوپی هر ساله α مقدار از شدت تابش خود را از دست بدهد، و شدت اولیهء این عنصر $I_۰$ باشد، شدت تابش آن پس از n سال برابر با $I_n = (۱ - \alpha)^n I_۰$ خواهد بود.

مثال ۵.۵.۳. (اقتصاد) به یک سپرده بانکی بلند مدت ماهانه ۱٪ سود تعلق گرفته و سود ماه بعد علاوه بر اصل پول، به سود آن نیز تعلق می گیرد. اگر مبلغ ۱۰ میلیون تومان در این بانک سپرده گذاری کنیم پس از ۴ سال موجودی ما به چه مقدار خواهد رسید؟

حل. اگر مبلغ A تومان در این بانک سپرده گذاری کنیم پس از یکماه موجودی $A+\alpha A$ یا $A(۱+\alpha)$ خواهد شد که α سود ماهانه است. فرض اینست که سود هم به اصل پول و هم به سود آن تعلق می گیرد، بدین ترتیب در ماه دوم موجودی به

$$A(۱+\alpha)+\alpha(A(۱+\alpha)) = A(۱+\alpha)(۱+\alpha) = A(۱+\alpha)^۲$$

می رسد. چنین فرآیندی رشدی پلکانی داشته و مقدار موجودی را بعد از n ماه به $A(۱+\alpha)^n$ تومان خواهد رساند. طبق مفروضات مسئله، پس از ۴ سال موجودی ۱۶۱۲۲۲۶۰ تومان خواهد شد. ■

تمرین ۶.۳. تمرینات تکمیلی.

۱. عبارات زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll}
(a) & ۲(۳a^۲-۴a+۵)-۶(۲a+a^۲+۵) \\
(b) & ۱+(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)(x^۴+۱)(x^۸+۱) \\
(c) & \dfrac{۴x^۴y-۳۲xy}{-۲x^۵z+۱۶x^۲z} \\
(d) & \dfrac{x^۲-y^۲}{۳xy-۳y^۲} \\
(e) & \dfrac{۲x^۴y+۱۰x^۳y+۱۲x^۲y}{۲x^۲y+۴xy} \\
(f) & \dfrac{(x+y)^۲}{(۲x+۲y)^۲} \\
(g) & ۱+(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱) \\
(h) & \dfrac{a^۳-b^۳}{(a^۲-b^۲)(a^۲+ab+b^۲)} \\
(i) & \dfrac{x^۲+۳x-۴}{x^۲-۳x-۲۸}\times\dfrac{۲x^۲-۸x-۴۲}{x^۲+۲x-۳} \\
(j) & \dfrac{(x^۲-y^۲)(x^۲+xy+y^۲)}{۲x^۳-۲y^۳} \\
(k) & \dfrac{(x+y)(x^۲-xy)^۲}{۳x^۳-۳xy^۲}\times\dfrac{x^۳-x^۲y+xy^۲}{x^۴y+xy^۴} \\
(\ell) & \dfrac{(x-۲y)(x^۲+۲xy+۴y^۲)}{x^۳-۸y^۳} \\
(m) & \dfrac{x^۲-۴x+۳}{x^۲-۵x+۶}\times\dfrac{x^۲+x-۲۰}{۳x^۲+۱۲x-۱۵}\times\dfrac{x^۲+x-۶}{x^۲-x-۱۲} \\
(n) & ۱۳۹۵\times ۲۵۹+۱۳۹۵\times ۳۴۱
\end{array}$$

۲. حاصل عددی عبارات زیر را بازای مقادیر $x=2$، $y=3$ و $z=-1$ بدست آورید.

$$(a)\quad \frac{x+y+z}{x-y+z}\ ,\quad (b)\quad \sqrt{\frac{x^2+y^2-12z}{x+y}}\ ,\quad (c)\quad \frac{(x+1)(y+1)(z-1)}{\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}}$$

۳. معادلات زیر را حل نمائید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & x^2+3x-4=0 & ,\ (b) & 3x^2-4x+6=0\\
(c) & 6x^2+6x=0 & ,\ (d) & 2x^3-13x^2+15x=0\\
(e) & 2x^2=x+1 & ,\ (f) & 4x^4=(x+3)^4\\
(g) & (2x+4)(3x+3)=(x+1)(3x+5) & ,\ (h) & \dfrac{x(x-1)}{x^2+x}=0\\
(i) & x^2-x+6-(2x-3)(x-2)=-x & ,\ (j) & \sqrt[3]{x}+2=\sqrt[3]{x+2}\\
(k) & x(x+2)-3x=x^2+5x-3 & ,\ (\ell) & x^3-3x^2+3x-9=0\\
(m) & x^4-5x^2+4=0 & ,\ (n) & x^4+x^2-10x=0
\end{array}$$

۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
(a) & \dfrac{x+1}{2x-4}\geqslant\dfrac{2x+1}{x-5} & ,\ (b) & \dfrac{x^3-5x}{x^2-4x-45}<x\\
(c) & \dfrac{8}{x-1}<\dfrac{3}{x+4}-5 & ,\ (d) & \dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x-3}{x-2}\leqslant 2\\
(e) & \dfrac{x^2-2}{(x+1)^2}>1 & ,\ (f) & \dfrac{5}{x}>\dfrac{6}{x-1}\\
(g) & \dfrac{6x^3+5}{(2x^2+2)(x+1)}<3 & ,\ (h) & 2x^2-5x+6\leqslant(2x-3)(x-2)\\
(i) & \dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{x+2}{x-2}\leqslant -2 & ,\ (j) & (x-2)^2+2(x+1)>(x-5)(x+3)
\end{array}$$

۵. مخرج عبارات کسری زیر را گویا نمائید.

$$\begin{array}{llllll}
(a) & \dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} & ,\ (b) & \dfrac{4x}{\sqrt[3]{3x}-1} & ,\ (c) & \dfrac{y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}\\
(d) & \dfrac{18}{\sqrt{7}+\sqrt{6}+\sqrt{5}} & ,\ (e) & \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}} & ,\ (f) & \dfrac{y-z}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x+z}}
\end{array}$$

۶. با روش تجزیهٔ کسرها، مقادیر A و B و C را چنان بیابید که اتحادهای زیر بازای هر x (بجز ریشهٔ مخرج ها) برقرار باشند.

$$(a)\quad \frac{x+۱}{x^{۲}-۴}\equiv\frac{A}{x-۲}+\frac{B}{x+۲}$$

$$(b)\quad \frac{۴}{x^{۲}-۴x-۱۲}\equiv\frac{A}{x+۲}+\frac{B}{x-۶}$$

$$(c)\quad \frac{۵x+۱}{x^{۳}-۱}\equiv\frac{A}{x-۱}+\frac{Bx+C}{x^{۲}+x+۱}$$

$$(d)\quad \frac{۵x^{۲}+۵x-۱۴}{x^{۲}(x+۷)}\equiv\frac{A}{x}+\frac{B}{x^{۲}}+\frac{C}{x+۷}$$

$$(e)\quad \frac{۲x+۱}{x^{۲}-۴x+۳}\equiv\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x-۳}$$

$$(f)\quad \frac{x^{۲}+۲}{x^{۴}-۱}\equiv\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۱}+\frac{Cx+D}{x^{۲}+۱}$$

۷. تمام x–هائی را بیابید که بازای آنها مقدار $\sqrt{x^{۲}+۴x+۵}$ با مفهوم باشد.

۸. تقسیم های زیر را انجام دهید.

$$(a)\ \ (x^{۳}+۵x-۷)\div(x-۱)\qquad,\qquad(b)\ \ (x^{۳}-۵x^{۲}-۶x+۱۶)\div(x+۲)$$

۹. معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{۴x}{a+b+c}=۱$$

۱۰. دستگاه های زیر را حل نمائید.

$$(a)\quad\begin{cases}۲x-۴y=-۶,\\ x+۵y=۲۵.\end{cases}\quad,\ (b)\quad\begin{cases}۲x+۳y+z=۱,\\ x+۴y+۲z=۱,\\ ۵x-y-۳z=۲.\end{cases}$$

$$(c)\quad\begin{cases}\frac{۲}{x}+\frac{۱}{y}=۴,\\ \frac{۳}{x}-\frac{۴}{y}=-۷.\end{cases}\quad,\ (d)\quad\begin{cases}\frac{۴}{۳x+۱}+\frac{۳}{y-۱}=۲,\\ \frac{۱}{۳x+۱}-\frac{۲}{y-۱}=۶.\end{cases}$$

$$(e)\quad\begin{cases}۳x+۲y>۵,\\ x+y=۱.\end{cases}\quad,\ (f)\quad\begin{cases}x-y<۴,\\ x+۲y=۱.\end{cases}$$

$$(g)\quad\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=۳,\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۷.\end{cases}\quad,\ (h)\quad\begin{cases}x^{۲}+۲y=۹,\\ -۳x^{۲}+y=۱.\end{cases}$$

۱۱. جملهٔ چهارم بسط $(۲xy - ۵x)^{۷}$ چیست؟

۱۲. مقدار a را چنان بیابید که معادلهٔ $x^{۲} - ۴ax + ۴ = ۰$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

۱۳. معادلات زیر را برای n صحیح حل کنید.

$$(a)\quad \frac{(n+۲)!}{n!} = ۲۰ \quad , (b)\quad \frac{(n-۱)!}{(n-۳)!} = ۴۲ \quad , (c)\quad n! - ۲(n-۲)! = ۲۰$$
$$(d)\quad \frac{۲(n+۱)n!}{(n-۱)!} = ۲۴ \quad , (e)\quad \frac{n!}{۲(n-۲)!} = ۶ \quad , (f)\quad \frac{(n+۱)! - n \times n!}{(n-۱)!} = ۹$$

۱۴. دهقانی که از ده خود به ایستگاه راه آهن می رفت در ساعت اول ۳ کیلومتر را طی کرد ولی حساب کرد که اگر با همین سرعت برود ۴۰ دقیقه بعد از ورود قطار به ایستگاه می‌رسد. بهمین خاطر بقیه راه را با سرعت ۴ کیلومتر بر ساعت طی کرد و ۴۵ دقیقه قبل از ورود قطار به ایستگاه رسید. فاصلهٔ ده تا ایستگاه را پیدا کنید.

۱۵. آلیاژی از دو فلز به نسبت ۲ : ۱ و آلیاژ دیگری از همان فلزات به نسبت ۳ : ۲ تشکیل شده است. به چه نسبتی این دو آلیاژ را با هم مخلوط کنیم تا آلیاژی از این فلزات به نسبت ۲۷ : ۱۷ بدست آید.

۱۶. ۲۰٪ از افراد یک جامعه به وبا مبتلا هستند. ۷ درصد مبتلایان فوت کرده اند. نسبت مرگ و میر این بیماری به کل جامعه چقدر است.

۱۷. در یک کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۸٪ از دانشجویان در امتحان ریاضی رد شدند. نسبت دانشجویان قبول شده به دانشجویان رد شده چند برابر است؟

۱۸. توپی پس از برخورد با زمین باندازهٔ $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع رها شده بطرف بالا بر می گردد. اگر این توپ را از ارتفاع ۸٫۱ متری بطرف زمین رها کنیم، پس از چند بار برخورد با زمین به ارتفاع ۱٫۶ متری زمین بر می گردد.

۱۹. (زیست) ایزوتوپ پتاسیم ^{۴۲}K را در ردیابی ناهنجاری بدنی بکار می برند. این ایزوتوپ هر ساعت ۵/۴٪ از شدت تابش خود را از دست می دهد. اگر $I_۰$ شدت اولیهء این عنصر باشد، شدت تابش پس از پنج ساعت چقدر خواهد شد؟

۲۰. (فیزیک) پرنده ای فاصلهٔ ۴۰ کیلومتری را در خلاف جهت باد پرواز می کند و سپس همان فاصله را بر می گردد. اگر رفت و برگشت پرنده ۲٫۵ ساعت طول کشیده باشد و سرعت باد هم ۳۰ کیلومتر در ساعت باشد سرعت پرنده را در هوای آرام بیابید.

۲۱. (شیمی) دو محلول اسید سولفوریک داریم که در اولی ۸۰۰ گرم و در دومی ۶۰۰ گرم اسید خالص وجود دارد. این دو محلول را با هم مخلوط کرده و ۱۰ کیلوگرم محلول اسید سولفوریک بدست آورده ایم. وزن هر یک از محلولها را پیدا کنید بشرطی که بدانیم در محلول اول ۱۰ درصد بیش از دومی اسید سولفوریک خالص وجود داشته است.

۲۲. (اقتصاد) به یک سپرده بانکی بلند مدت ماهانه ۰٫۵٪ سود تعلق گرفته و سود ماه بعد علاوه بر اصل پول، به سود آن نیز تعلق می گیرد. اگر مبلغ ۵۰ میلیون تومان در این بانک سپرده گذاری کنیم پس از ۲ سال موجودی ما به چه مقدار خواهد رسید؟

۲۳. (اقتصاد) مبلغی را با نرخ ۲ درصد در صندوق پس انداز گذاشته ایم و پس از مدتی بابت اصل پول و سود آن ۸۵۰۲ تومان گرفته ایم. اگر همین مبلغ را با نرخ ۳ درصد و برای یکسال کمتر به صندوق پس انداز می سپردیم ۸۱۹ تومان سود آن می شد. مبلغ اصلی سرمایه و مدت زمانی که در صندوق پس انداز بوده را بیابید.

۲۴. (اقتصاد) مجموع دو سرمایه مساوی ۱۰ هزار دلار است. اگر نرخ بهره هر سرمایه مساوی یک هزارم همان سرمایه باشد و مجموع بهرهٔ دو سرمایه در یکسال برابر ۵۸۰ دلار شود، هر یک از دو سرمایه چقدر بوده است؟

۲۵. (اقتصاد) اضافه تولید یک کارخانه نسبت به سال قبل ۱۰ درصد و در سال دوم ۲۰ درصد بوده است. اضافه تولید در سال سوم چند درصد باشد تا متوسط اضافه تولید در سه سال ۳۱ درصد شود.